

**Interdependența dintre tipul de colinearitate și valorile calculate ale testului Student
în cazul unei regresii lineare cu două variabile explicative**
(Interdependence between the type of collinearity and the computed values of Student test in case
of a linear regression with two explanatory variables)

Florin-Marius Pavelescu
Institutul de Economie Națională
pavelescu.florin@yahoo.com

***Abstract.** Having in mind that the collinearity generates distortions both on parameters estimated values and also on the statistical tests, at the beginning of this paper are reviewed the consequences of the respective distortions and is built a method for the identification of the types of collinearity. The proposed method takes into account the values of the coefficients of alignment to collinearity hazard, firstly defined in (F.M. Pavelescu, 1986). În the second part of the paper, there are presented the advantages of the use of Corrected Student Test, proposed in (F.M. Pavelescu, 2009) and of its factorial analysis in case of a linear regression with two explanatory variables. Also, arguments are brought in favour of the definition of a Synthetical Student Test, comprising the arithmetical mean and the coefficient of variation of the computed values of Corrected Student Test. Afterwards, a numerical example is presented in which there are identified all the four types of collinearity possible from theoretical point of view.*

Key words: Coefficient of alignment to collinearity hazard, types of collinearity, reference value of Corrected Student Test, Synthetical Student Test.

***Rezumat.** Pornind de la faptul că colinearitatea generează distorsiuni atât ale valorilor estimate cât și ale testelor statistice, la începutul prezentei lucrări sunt inventariate consecințele respectivelor distorsiuni și este construită o metodă de identificare a tipurilor de colinearitate, avându-se în vedere valorile coeficienților de aliniere la hazardul colinearității, definiți pentru prima dată în (F.M. Pavelescu, 1986). În partea a doua a lucrării sunt prezentate avantajele utilizării Testului Student Corectat, propus în (F. M: Pavelescu, 2009) și a analizei factoriale a acestuia în cazul unei regresii lineare cu două variabile explicative. Totodată, sunt aduse argumente în favoarea definirii și a unui test Student Sintetic, compus din media și coeficientul de variație a valorilor calculate ale Testului Student Corectat. Ulterior, este prezentat un exemplu numeric în care sunt identificate în mod practic toate cele 4 tipuri de colinearitate posibile din punct de vedere teoretic.*

Cuvinte cheie: coeficienți de aliniere la hazardul colinearității, tipuri de colinearitate, valoarea de referință a Testului Student Corectat, Testul Student Sintetic.

Clasificarea JEL: C13, C20, C51, C52

1. Principalele distorsiuni determinate de fenomenul colinearității asupra valorilor parametrilor estimați și a valorilor calculate ale unor teste statistice

Metoda celor mai mici pătrate pornește de la ipoteza că variabilele explicative sunt independente unele față de altele. În realitate, această condiție nu se respectă, deoarece între variabilele care modelează un fenomen sau proces economic se manifestă în mod necesar anumite relații de interdependență, care pot fi cuantificate prin intermediul coeficienților de corelație Pearson. Din acest motiv, **problema impactului pe care colinearitatea îl are asupra acurateții valorilor parametrilor estimați nu se pune doar în cazul folosirii metodei celor mai mici pătrate, ci reprezintă o problemă care trebuie surmontată de toate metodele de estimare.**

Un grad ridicat de colinearitate determină o serie de distorsiuni atât în ceea ce privește valorile estimate ale parametrilor, cât și în ceea ce privește valorile calculate ale testelor statistice și cu deosebire ale testului Student, dintre care cele mai importante sunt:

a) apariția unor semne contrare ale parametrilor estimați în raport cu semnul coeficientului de corelație Pearson dintre variabila rezultativă și variabila explicativă¹.

b) nivelul redus al valorilor calculate ale testului Student, chiar și în condițiile în care se manifestă o corelație puternică între variabila rezultativă și variabila explicativă pentru care este realizat testul.

c) valori ridicate ale factorului de inflație al varianței (VIF)².

d) valori ridicate ale numărului condiționat, (NC)³

Consecința practică a existenței unei colinearități accentuate este aceea că dispersiile și abaterile standard ale estimatorilor tind să fie cu atât mai mari cu cât gradul de multicolaritate este mai mare. În contextul selectării un anumit prag de semnificație intervalele de încredere pentru parametrii modelului se măresc, ceea ce duce la scăderea preciziei estimatorilor (D.Jula, 2003).

¹ În literatura econometrică anglo-saxonă această situație este definită de regulă ca „wrong (unexpected) sign of the estimated parameters”. A se vedea în acest sens G. Ferrar și R. Glauber (1967) și C. Conrad (2006)

² Calculul **factorului de inflație al varianței** (VIF) presupune efectuarea unor regresii liniare a fiecăreia dintre variabilele modelului în raport cu celelalte. Se calculează valoarea coeficientului de determinare aferent respectivelor regresii și apoi se determină VIF pentru fiecare dintre variabilele explicative (X_j), conform formulei: $VIF(X_j) = \frac{1}{1 - R_{xj}^2}$. Dacă

$VIF(X_j) \geq 5$, se consideră că multicolaritatea este ridicată.

³ **Numărul condiționat** (NC) reprezintă rădăcina pătrată a modului raportului dintre valoarea proprie cea mai mare și cea mai mare a matricii ($X^T X$) a valorilor variabilelor explicative X_j . Dacă nu există colinearitate, atunci NC este egal cu 1. În practică, se consideră că dacă NC este mai mare decât 15, multicolaritatea este importantă, iar dacă NC este mai mare de 30 multicolaritatea devine un impediment pentru obținerea unor rezultate fezabile ale regresii liniare.

2. Definirea și clasificarea tipurilor de colinearitate.

Colinearitatea este determinată în esență de existența unui nivel ridicat de corelație între cel puțin două dintre variabilele explicative ale unei regresii liniare multiple. Deoarece în modelele econometrice între variabilele explicative se manifestă în mod obiectiv interdependențe, literatura de specialitate are o lungă istorie a studierii fenomenului colinearității. Una dintre primele abordări ale problemei amintite anterior este un articol publicat de R. Frisch în anul 1934⁴. Dar despre o studiere sistematică a cauzelor și efectelor pe care colinearitatea le are asupra calității estimării modelelor econometrice și propunerea unor măsuri pentru atenuarea distorsiunilor pe care respectivul fenomen le generează, se poate vorbi doar începând cu anii 1950.

În anul 1957 Kendall propunea o primă metodă de „ortogonalizare artificială”. În mod indirect, definirea însăși a noțiunii de ortogonalizare artificială releva faptul că fenomenul colinearității reprezintă în fapt o „îndepărtare” de la ipoteza independenței variabilelor explicative, cu alte cuvinte a existenței unor coeficienți de corelație Pearson dintre respectivele variabile cu valoare egală sau foarte apropiată de zero. În funcție de valorile coeficienților de corelație menționați anterior, colinearitatea constituie sau nu o problemă pentru calitatea estimărilor. Din acest motiv, în anul 1962, L. Klein arăta că fenomenul colinearității nu constituie în mod necesar un impediment pentru obținerea unor estimări fezabile, ci numai în măsura în care există un coeficient de corelație Pearson între variabilele explicative cu o valoare absolută mai mare decât cea a coeficientului de corelație multiplă.

În consecință, colinearitatea au fost identificate două tipuri de colinearitate și anume: a) colinearitate laxă (acceptabilă) –weak (acceptable) collinearity și b) colinearitate toxică - harmful collinearity.

Colinearitatea laxă (acceptabilă) caracterizează situațiile în care îndepărtarea de la ortogonalitatea variabilelor explicative este mică, ceea ce conduce la obținerea unor estimări fezabile ale parametrilor.

Colinearitatea toxică a fost inițial definită ca fiind totalitatea situațiilor în care apar semne ale parametrilor în discordanță cu natura (semnul) corelației dintre variabila rezultativă și variabila explicativă analizată (wrong signs of the estimated parameters) sau alte simptome ale unor regresii

⁴ În fapt, respectivul articol poate fi socotit precursorul „studierii prin analiza numerică” a colinearității. Tehnica propusă pentru investigarea corelațiilor dintre variabilele explicative era una grafică și reprezintă prima încercare din domeniul științelor economice de a descoperi sursa dependențelor din seriile de date. Scopul utilizării respectivei metode era de a rezolva prima problemă a diagnosticului colinearității, respectiv localizarea dependențelor, dar nu se făcea nici o referire la determinarea gradului în care rezultatele estimării sunt distorsionate (degradate) de intensitatea legăturilor dintre variabilele explicative, cu alte cuvinte de colinearitate (cf. D.Belsey, 1976).

liniare lipsite de sens (D.Ferrar, R. Glauber, 1967). Pentru evitarea apariției colinearității toxice, se propunea respectarea regulii empirice, conform căreia valorile coeficienților de corelație dintre variabilele explicative nu trebuie să fie mai mari de 0,8.

În 1976, Belsey face distincție între „colinearitatea toxică”(harmful collinearity) și „colinearitatea degradantă” (degrading collinearity)⁵. Respectiva distincție a fost făcută având în vedere că o corelație puternică între variabilele explicative este în mod potențial o problemă pentru calitatea estimării. Cu alte cuvinte, „colinearitatea este potențial toxică, dar acest fapt trebuie să fie testat pentru a se vedea dacă avem de a face cu „rezultate otrăvite” sau „doar degradate”. În aceste condiții, se poate identifica nu numai o „colinearitate toxică”, ci și o „colinearitate degradantă”.

Ca metodă de studiu pentru determinarea caracterului colinearității se pledea pentru utilizarea noțiunii de „semnal” și „zgomot”, larg utilizată în științele tehnice și ingineresti. În aceste condiții, colinearitatea apare ca fiind un zgomot produs de îndepărtarea de la ipoteza perfecte independențe a variabilelor explicative, iar valorile estimate ale parametrilor unei regresii liniare multiple ca fiind un „semnal distorsionat de zgomot”. Totodată, se consideră că fenomenul colinearității este generat de date statistice inadecvate (ill-conditioned statistical data). În acest context, au fost propuse două tipuri de teste pentru identificarea colinearității toxice și respectiv degradante (Belsey, 1991) în cazul unui model de regresie liniară.

Utilizarea noțiunilor de „semnal”, „zgomot”, „semnal distorsionat de zgomot”, precum și „raport dintre semnal și zgomot” în definirea tipului de colinearitate se poate face și dacă se are în vedere noțiunea de „coeficient de aliniere la hazardul colinearității” propusă în (F. M. Pavelescu, 1986).

Deoarece în cazul unei regresii liniare multiple $y = a_n + \sum_{k=1}^n b_{nk} * x_k$ ($k = 1...n$), parametrii estimați se pot scrie:

$$a_n = y_{med} - \sum_{k=1}^n b_{nk} * x_{kmed} \quad (1) \text{ și } b_{nk} = b_{1k} * T_{nk}, \quad (2), \text{ unde:}$$

⁵ Tot în lucrarea publicată în 1976 la NBER (National Bureau of Economic Research Washington), Belsey face o serie de remarci interesante referitoare la metodele de determinare a naturii colinearității și a impactului acesteia asupra calității estimării parametrilor. Astfel sunt identificate două principale tipuri de abordări ale studiului colinearității, respectiv:

- a) **Abordarea statistică**, în care reprezentative sunt lucrările lui Farrar și Glauber (1967), Hoaitovsky (1969), Kumar (1975), și
- b) **Abordarea prin intermediul analizei numerice**, în care se pot remarca studiile lui Kendall (1957), Kloeck și Mennes (1960), Sylvey (1969), sau Stewart (1973).

Din analiza comparativă a celor două tipuri de abordări Belsey, consideră că abordarea prin intermediul analizei numerice are o serie de avantaje în raport cu abordarea statistică.

y_{med} = media aritmetică a valorilor observate ale variabilei rezultative

x_{med} = media aritmetică a valorilor observate ale variabilei explicative x_k .

b_{1k} = valoarea estimată a parametrului b în cazul regresiei liniare simple $y = a_1 + b_{1k} * x_k$

$$b_{1k} = \frac{\text{cov}(y; x_k)}{\text{var}(x_k)} \quad (3)$$

$\text{cov}(y, x_k)$ = covarianța dintre variabila rezultativă și variabila explicativă x_k .

$\text{var}(x_k)$ = dispersia valorilor observate ale variabilei explicative x_k

T_{nk} = coeficientul de aliniere la hazardul colinearității

$$T_{nk} = \frac{(R_{j1}, R_{j2}, \dots, R_{jk-1}, r_{jk}, R_{jk+1}, \dots, R_{jn})}{(R_{jk})_n} \quad (4) \quad j = 1 \dots n$$

R_{jk} = coeficienții de corelație Pearson între variabilele explicative x_j și x_k .

$$r_{jk} = \frac{R(x_j; y)}{R(x_k; y)} \quad (5) \quad \text{unde:}$$

$R(x_j; y)$ = coeficientul de corelație Pearson dintre variabila explicativă x_j și variabila rezultativă.

$R(x_k; y)$ = coeficientul de corelație Pearson dintre variabila explicativă x_k și variabila rezultativă.

Dacă se respectă condiția ca $|R(x_j; y)| < |R(x_k; y)|$, atunci r_{jk} poate fi definit drept "coeficient de corelație mediată de variabila rezultativă dintre variabilele explicative x_j și x_k (F.M. Pavelescu, 2010 a).

În aceste condiții, putem considera valoarea b_{1k} , ca fiind „semnalul”, valoarea b_{nk} drept „semnalul distorsionat de zgomot” iar coeficientul de aliniere la hazardul colinearității T_{nk} , drept o formă transformată a „raportului dintre zgomot și semnal”.

În fapt, coeficientul de aliniere la hazardul colinearității poate fi utilizat la determinarea tipului de colinearitate prezent în regresii liniare multiple. Astfel, în (F.M. Pavelescu, 2010 b) se propune următoarea regulă empirică de clasificare a colinearității:

a) **colinearitate laxă (acceptabilă)** dacă toți coeficienții de aliniere la hazardul colinearității sunt cel puțin egali cu 0,5.

b) **colinearitate degradantă**, dacă toți coeficienții de aliniere sunt pozitivi, iar cel puțin unul dintre ei este mai mic decât 0,5.

c) **colinearitate toxică**, dacă între coeficienții de aliniere ale unei regresii liniare există cel puțin unul care este negativ.

Având în vedere formulele de calcul prezentate în (F.M. Pavelescu, 2010b), se poate arăta că valorile coeficienților de aliniere la hazardul colinearității influențează nu numai valorile parametrilor estimați în cazul unor regresii liniare, ci și valorile calculate ale unor teste statistice, cum sunt: Coeficientul de determinare Coeficientul de determinare ajustat, Testul Fisher, Testul Student.

Deoarece valorile calculate ale Testului Student sunt cele mai sensibile la diferitele tipuri de colinearitate în continuare vom analiza impactul pozitiv pe care unele transformări operate în modul de calcul al respectivului test statistic le pot aduce în mai buna apreciere a calității estimărilor. În această lucrare, vom avea în vedere doar cazul regresiei liniare cu două variabile explicative, datorită unor formule de calcul mai simple, dar care ajută în mod sensibil la o mai bună înțelegere a logicii metodei celor mai mici pătrate în forma sa standard.

3. Avantajele definirii și analizei factoriale a valorilor calculate ale Testului Student

Corectat. Cazul regresiei liniare cu două variabile explicative.

În cazul regresiei liniare cu două variabile explicative în funcție de mărimea absolută a coeficienților de corelație Pearson dintre variabilele explicative și variabila rezultativă, putem defini o variabilă explicativă principală (x_p) și o variabilă explicativă secundară (x_s). Se adoptă ipoteza că $|R(x_s; y)| < |R(x_p; y)|$.

Se poate demonstra că, în cazul unei regresii liniare cu două variabile explicative, valorile calculate ale testului Student în formă standard sunt :

a) pentru variabila explicativă principală (t_{x_p})

$$t_{x_{2p}} = (m-3)^{(1/2)} * R(x_p; y) * \frac{(1-R^2(x_p; x_s))^{(1/2)}}{(1-R^2)^{(1/2)}} * T_{2p} \quad (6) \text{ și}$$

b) pentru variabila secundară (t_{x_s})

$$t_{x_{2s}} = (m-3)^{(1/2)} * R(x_s; y) * \frac{(1-R^2(x_p; x_s))^{(1/2)}}{(1-R^2)^{(1/2)}} * T_{2s} \quad (7)$$

unde:

m= numărul de observații

$R(x_p; y)$ = coeficientul de corelație Pearson dintre variabila explicativă principală și variabila rezultativă

$R(x_s; y)$ = coeficientul de corelație Pearson dintre variabila explicativă secundară și variabila rezultativă

$R(x_p; x_s)$ = coeficientul de corelație Pearson dintre cele două variabile explicative

R^2_2 = coeficientul de determinare aferent regresiei liniare cu două variabile explicative.

T_{2p} = coeficientul de aliniere la hazardul colinearității aferent variabilei explicative principale

T_{2s} = coeficientul de aliniere la hazardul colinearității aferent variabilei explicative secundare.

Se mai poate arăta că:

$$R^2_2 = R^2(x_p; y) * \left(1 + \frac{(r_{sp} - R(x_p; x_s)_{tr})^2}{1 - R^2(x_p; x_s)}\right) \quad (8)$$

$$T_{2p} = \frac{1 - r_{sp} * R(x_p; x_s)_{tr}}{1 - R^2(x_p; x_s)} \quad (9)$$

$$T_{2s} = \frac{r_{sp} - R(x_p; x_s)_{tr}}{r_{sp} * (1 - R^2(x_p; x_s))} \quad (10)$$

$$r_{sp} = \frac{R(x_s; y)}{R(x_p; y)} \quad (11)$$

$$R(x_p; x_s)_{tr} = R(x_p; x_s) * \frac{R(x_s; y)}{R(x_p; y)} \quad (12)$$

De regulă, r_{sp} și $R(x_p; x_s)$ au același semn. Transformarea operată asupra $R(x_p; x_s)$ și utilizarea în analiza valorilor coeficienților de aliniere la hazardul colinearității a indicatorului $R(x_p; x_s)_{tr}$ are rolul de a asigura o mai mare acuratețe demersului privind identificarea tipurilor de colinearitate.

În aceste condiții, se observă că:

a) **colinearitatea toxică apare dacă:** $r_{sp} < R(x_p; x_s)_{tr}$

b) **colinearitatea degradantă apare dacă :** $R(x_p; x_s)_{tr} < r_{sp} < \frac{2R(x_p; x_s)_{tr}}{1 + R^2(x_p; x_s)}$

c) **colinearitatea laxă apare dacă :** $r_{sp} > \frac{2R(x_p; x_s)_{tr}}{1 + R^2(x_p; x_s)}$

d) o excepție de la regulă apare atunci când r_{sp} și $R(x_p; x_s)$ au semne contrare. De regulă, respectiva situație apare în cazul când forma transformată **Situația respectivă a fost denumită în (F.M.**

Pavelescu, 2009) ca anticolinearitate între cele două variabile explicative avute în vedere. Datorită faptului că $r_{sp} * R(x_p; x_s)_{tr}$, în condițiile anticolinearității ambii coeficienți de aliniere la hazardul colinearității sunt pozitivi și supraunitari. De asemenea, se observă că $T_{2p} < T_{2s}$.

Pe de altă, parte, formula (8) evidențiază două aspecte importante referitoare la coeficientul de determinare și anume:

- a) caracterul cumulativ al coeficientului de determinare, relevat de faptul că valoarea respectivului indicator este mai mare în cazul regresiei liniare cu două variabile explicative comparativ cu regresia liniară simplă.**
- b) apariția unei colinearități toxice accentuate poate conduce la multiplicarea valorii coeficientului de determinare.**
- c) în condițiile unor valori date ale coeficienților de corelație Pearson $R(x_p; y)$ și $R(x_p; x_s)$, coeficientul de determinare este mai mare în cazul colinearității laxe decât în cazul colinearității degradante.**

Formulele (6) și (7) permit să se pună în evidență factorii care modelează valorile calculate ale testului Student. Se poate observa că, în formă absolută, valorile calculate ale respectivului test sporesc o dată cu creșterea numărului de observații⁶. De asemenea, se poate evidenția faptul că respectivele valori sunt influențate în mod direct și indirect de valorile coeficientului de aliniere la hazardul colinearității.

Se observă că în forma sa standard, testul Student nu permite evidențierea rapidă a colinearității toxice. Din acest motiv, în (F.M. Pavelescu, 2009) a fost propusă definirea unui Test Student Corectat (CST). Între valoarea calculată a Testului Student standard aferent variabilei explicative b_{nk} (t_{bnk}) și cea a Testului Student Corectat (CST_{bnk}) există următoarea relație:

$$CST_{bnk} = \frac{|R(x_k; y)|}{R(x_k; y)} * t_{bnk} \quad (13), \text{ ceea ce în cazul unei regresii liniare cu două variabile explicative}$$

este echivalent cu :

$$CST_{b_{2k}} = (m - 3)^{(1/2)} * |R(x_k; y)| * \frac{(1 - R^2(x_p; x_s))^{(1/2)}}{(1 - R_2^2)^{(1/2)}} * T_{2k} \quad (14)$$

⁶ Faptul că un număr mai mare de observații conduce la o majorare a valorii calculate absolute a testului Student în forma sa standard explică de ce în multe lucrări de econometrie sporirea numărului de observații este considerată ca una dintre metodele de atenuare a efectelor colinearității. Astfel, se pune semnul egalității între valorile calculate ale testului Student și intensitatea colinearității. O asemenea abordare o considerăm discutabilă, deoarece indicatorul sintetic al tipului de

În cazul Testului Student Corectat se mențin din punct de vedere teoretic toate ipotezele care definesc forma standard a Testului Student. Singura deosebire între cele două teste statistice este utilizarea în cazul Testului Student Corectat a scalarului $\frac{|R(x_k; y)|}{R(x_k; y)}$, cu scopul de a evidenția în mod direct semnul coeficientului de aliniere la hazardul colinearității și de a se detecta apariția colinearității toxice.

Deoarece valoarea calculată a Testului Student Corectat este un produs al acțiunii mai multor factori se pune problema unui model de analiză a influenței acestora. Datorită formulei de calcul relativ complicate a Testului Student Corectat, pentru a se obține un model de analiză fiabil, se pune problema regrupării termenilor și o redefinire a acestora, astfel încât să se realizeze o combinație liniară a noilor factori modelatori.

Astfel, pornind de la considerațiile expuse în Belsey (1991), potrivit cărora în mod normal valorile calculate ale Testului Student ar trebui să reflecte valorile coeficientului de corelație Pearson dintre variabila explicativă analizată și variabila rezultativă se poate defini indicatorul “**Valoarea de referință a Testului Student Corectat**” ($RV_{studxnk}$)

În cazul unei regresii liniare cu două variabile explicative valoarea indicatorului menționat anterior (RV_{stud2k}) este egală cu: $RV_{stud2k} = [m - 3]^{1/2} * |R(y, x_k)|$ (15).

Pe de altă parte, avem în vedere faptul că în D. Ferrar și R. Glauber (1967) se considera că se poate defini colinearitatea toxică nu numai atunci când semnul parametrilor estimați este contrar celui anticipat, în fapt cel al coeficientului de corelație Pearson dintre variabila explicativă analizată și variabila rezultativă, ci și atunci când pătratul coeficientului de corelație Pearson dintre variabilele explicative este mai mare decât coeficientul de determinare al regresiei liniare multiple. Pornind de la cele prezentate anterior se poate defini și indicatorul “**Coeficientul de dominare a gradului de colinearitate de către coeficientul de determinare**” ($Cddc$). În acest caz, pentru a simplifica lucrurile, se consideră drept indicator al colinearității pătratul coeficientului de corelație Pearson dintre cele două variabile explicative.

$$\text{Formula de calcul a } Cddc \text{ este: } Cddc = \frac{(1 - R^2(x_p; x_s))^{(1/2)}}{(1 - R_2^2)^{(1/2)}} \quad (16)$$

colinearitate îl reprezintă, așa cum s-a menționat anterior, valoarea coeficientului de aliniere la hazardul colinearității, care poate fi atât pozitivă, cât și negativă.

În consecință, pentru analiza valorilor calculate ale Testului Student Corectat se poate folosi formula: $CST_{x2k} = RV_{studx2k} * Cddc * T_{2k}$ (17).

Formula (17) prezintă avantajul nu numai ale unei analize facile a factorilor modelatori ai valorilor calculate ale Testului Student Corectat, ci și pe cel al evidențierii unei taxonomii a colinearității în cazul regresiei liniare cu două variabile explicative. În tabelul nr. 1, pornindu-se de la valorile indicatorilor Cddc și T_{2s} , este prezentată respectiva taxonomie.

Tabelul nr. 1

Taxonomia colinearității în cazul regresiei liniare cu două variabile explicative

Nr.crt.	Cddc	T_{2s}	Tipul de colinearitate
1	Cddc < 1	$T_{2s} < 0$	Colinearitate toxică în contextul dominației gradului de colinearitate
2	Cddc > 1	$T_{2s} < 0$	Colinearitate toxică în contextul dominației coeficientului de determinare
3	Cddc < 1	$0 < T_{2s} < 0.5$	Colinearitate degradantă în contextul dominației gradului de colinearitate
4	Cddc > 1	$0 < T_2 < 0.5$	Colinearitate degradantă în contextul dominației coeficientului de determinare
5	Cddc < 1	$0.5 < T_2 < 1$	Colinearitate laxă în contextul dominației gradului de colinearitate
6	Cddc > 1	$0.5 < T_{2s} < 1$	Colinearitate laxă în contextul dominației coeficientului de determinare
7	Cddc < 1	$T_{2s} > 1$	Anticolinearitate

N.B. Pentru cazul anticolinearității există doar o singură situație, respectiv cea a dominației coeficientului de determinare, dată fiind faptul că valoarea absolută a coeficientului de corelație Pearson dintre cele două variabile explicative este mai mică decât cea a coeficientului de corelație Pearson dintre variabila explicativă secundară și variabila rezultativă.

Taxonomia prezentată anterior relevă faptul că dominanța gradului de colinearitate creează premisele nu numai pentru apariția colinearității toxice, ci și pentru colinearitatea degradantă. În cazul colinearității laxe, există o mai mare probabilitate pentru o dominație a coeficientului de determinare asupra gradului de colinearitate.

4. Definirea și valențele cognitive ale Testului Student Sintetic

De regulă, valorile calculate ale Testului Student în forma sa standard sunt analizate în mod separat. Dar, din evidențierea formulelor de calcul pentru regresia liniară cu două variabile explicative, pe care am prezentat-o anterior, reiese faptul că valorile respectivului test statistic, afiș în forma standard, cât și în cea corectată au o atât o serie de elemente comune (numărul de grade de libertate, coeficientul de

corelație Pearson dintre variabilele explicative, coeficientul de corelație Pearson dintre variabila explicativă principală și variabila rezultativă și coeficientul de determinare) cât și elemente de diferențiere reprezentate de coeficientul de corelație mediată de variabila rezultativă dintre variabilele explicative și coeficienții de aliniere la hazardul colinearității. În aceste condiții, se poate pune problema construirii unui indicator sintetic care să reflecte puterea Testului Student Corectat pe ansamblul regresiei liniare, precum și variabilitatea acestuia în cazul celor două variabile explicative. **Un asemenea indicator propunem să fie denumit „Testul Student Sintetic” și să fie compus din media și coeficientul de variație al valorilor individuale ale Testului Student Corectat.**

În cazul regresiei liniare cu două variabile explicative media aritmetică a Testului Student Corectat ($CSTAM_{m,2}$) este egală cu:

$$CSTAM_{m,2} = (m-3)^{(1/2)} * /R(x_p; y)/* \frac{1+r_{sp}}{2} * \frac{(1-R^2(x_p; x_s))^{(1/2)}}{(1-R^2)^{(1/2)}} * \frac{1}{1+R(x_p; x_s)_{tr}} \quad (18).$$

Se observă că dacă $R(x_p; x_s)=1$, respectiv există o situație de colineritate perfectă, atunci $CSTAM_{m,2}=0$.

De asemenea, $CSTAM_{m,2}$ este mai mare decât media valorilor de referință ale Testului Student Corectat ($RV_{stud2med}$) dacă:

$$r_{sp} > R(x_p; x_s)_{tr} + \frac{(2R(x_p; x_s)_{tr} * (1-R(x_p; x_s)_{tr}))^{(1/2)}}{/R(x_p; y)/} \quad (19).$$

Cu alte cuvinte, în cazul unei regresii liniare cu două variabile explicative, media aritmetică a Testului Student Corectat nu poate fi mai mare decât valoarea de referință medie în condițiile colinearității toxice.

$CSTAM_{m,n}$ constituie nu numai un indicator care evidențiază gradul de semnificație al parametrilor estimați la nivelul întregii ecuații de regresie liniară, ci și unul care relevă corelația dintre valorile calculate ale testului Student și testul Fisher. Astfel, raportul dintre $CSTAM_{m,n}$ și rădăcina pătrată a valorii calculate a testului Fisher ($F_{m,2}$)^(1/2) este egal cu :

$$\frac{CSTAM_{m,2}}{(F_{m,2})^{(1/2)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1/2)} * \frac{1+r_{sp}}{\left(1 + \frac{(r_{sp} - R(x_p; x_s)_{tr})^2}{(1-R(x_p; x_s)_{tr})^2}\right)^{(1/2)}} * \left(\frac{1-R(x_p; x_s)_{tr}}{1+R(x_p; x_s)_{tr}}\right)^{(1/2)} \quad (20).$$

Din formula (20) reiese că $CSTAM_{m,2} \leq (F_{m,2})^{(1/2)}$.

Pentru ca $CSTAM_{m,2} = (F_{m,2})^{(1/2)}$ este necesar ca variabilele explicative să fie perfect independente, respectiv $R(x_p; x_s) = 0$, iar intensitatea corelației cu variabila rezultativă a celor două variabile explicative să fie egală, respectiv $r_{sp} = 1$. În acest caz ideal, valoarea maximă a coeficientului de corelație Pearson dintre variabila explicativă principală și variabila rezultativă ($R(x_p; y)$) este de 0,5.

Coeficientul de variație al valorilor calculate ale Testului Student Corectat ($CSTCV_{m,2}$) se poate calcula după formula:

$$CSTCV_{m,2} = \frac{T_{2p} - r_{sp} * T_{2s}}{T_{2p} + r_{sp} * T_{2s}} \quad (21), \text{ echivalent cu:}$$

$$CSTCV_{m,2} = \frac{(1 + R(x_p; x_s)) * (1 + r_{sp})}{(1 - R(x_p; x_s)) * (1 - r_{sp})}. \quad (22).$$

Având în vedere formula (22) și modul de definire a tipurilor de colinearitate se poate demonstra că:

- a) dacă există **colinearitate toxică** atunci $CSTCV_{m,2} \geq 1$
- b) dacă există **colinearitate degradantă** atunci $\left(\frac{1 - R(x_p; x_s)_{tr}}{1 + R(x_p; x_s)_{tr}} \right) \leq CSTCV_{m,2} \leq 1$
- c) dacă există **colinearitate laxă** atunci $0 \leq CSTCV_{m,2} \leq \left(\frac{1 - R(x_p; x_s)_{tr}}{1 + R(x_p; x_s)_{tr}} \right)$.
- d) dacă există **anticolinearitate** atunci $CSTCV_{m,2} \leq \frac{1 - r_{sp}}{1 + r_{sp}}$

Se observă că reducerea distorsiunilor generate de colinearitate asupra valorii estimate a parametrilor se asociază cu diminuarea coeficientului de variație a valorilor calculate ale Testului Student Corectat.

5. Exemplu numeric de analiză și identificare a tipurilor de colinearitate.

În continuare, vom prezenta mai multe exemple numerice prin intermediul cărora vom testa posibilitatea aplicării metodei de identificare și analiză a tipului de colinearitate în cazul regresiei liniare cu două variabile explicative. În acest sens, pornind de la datele prezentate în (F.M. Pavelescu, 2009) și (F.M. Pavelescu, 2010b), se vor estima și calcula pentru început parametrii funcției de

producție de tip Cobb-Douglas relative la segmentul profesiilor non-manuale și segmentul profesiilor manuale în România, Spania, Regatul Unit și Slovacia în perioada 1995-2002 (1994=100)⁷.

Pentru evidențierea valorii coeficientului de aliniere la hazardul colinearității, s-a estimat atât funcția de tip Cobb-Douglas $\ln Y = \ln A_2 + \alpha_2 * \ln L_w + \beta_2 * \ln L_B$, cât și regresii liniare simple $\ln Y = \ln A_{1\ln L_w} + \alpha_1 * \ln L_w$ și $\ln Y = \ln A_{1\ln L_B} + \beta_1 * \ln L_B$, unde:

$\ln Y$ = logaritmul natural al indicilor PIB

$\ln L_w$ = logaritmul natural al indicilor segmentului profesiilor non-manuale al populației ocupate.

$\ln L_B$ = logaritmul natural al indicilor segmentului profesiilor manuale al populației ocupate

Au fost obținute următoarele rezultate:

Pentru România

$$\ln Y = 0.0613 + 0.6696 * \ln L_w - 0.3874 * \ln L_B \quad R_2^2 = 0.2568$$

$$\ln Y = 0.0495 - 0.0813 * \ln L_w \quad R_1^2 = 0.0016$$

$$\ln Y = 0.0346 - 0.2688 * \ln L_B \quad R_1^2 = 0.1871$$

Pentru Spania

$$\ln Y = 0.0082 + 0.5390 * \ln L_w + 0.2996 * \ln L_B \quad R_2^2 = 0.9952$$

$$\ln Y = -0.0033 + 0.7257 * \ln L_w \quad R_1^2 = 0.9926$$

$$\ln Y = 0.0444 + 1.1328 * \ln L_B \quad R_1^2 = 0.9750$$

Pentru Regatul Unit

$$\ln Y = -0.0017 + 1.5783 * \ln L_w + 0.6376 * \ln L_B \quad R_2^2 = 0.9960$$

$$\ln Y = 0.0080 + 1.6064 * \ln L_w \quad R_1^2 = 0.6251$$

$$\ln Y = 0.1174 + 0.6560 * \ln L_B \quad R_1^2 = 0.3930$$

Pentru Slovacia

$$\ln Y = -0.0412 + 3.6338 * \ln L_w - 1.3518 * \ln L_B \quad R_2^2 = 0.6867$$

$$\ln Y = 0.0047 - 0.3.4751 * \ln L_w \quad R_1^2 = 0.1776$$

$$\ln Y = 0.1718 - 1.3293 * \ln L_B \quad R_1^2 = 0.4927$$

⁷ Desigur că estimarea modelul econometric prezentat anterior poate fi criticată pentru faptul că seria de timp este foarte scurtă. Dar, scopul acestui exercițiu este de a demonstra că toate cele 4 patru tipuri de colinearitate identificate din punct de vedere teoretic există și în realitate. De asemenea, un alt motiv pentru alegerea celor 4 exemple este că se referă la același model econometric și la aceeași perioadă de timp.

N.B. R^2_2 și R^2_1 , reprezintă coeficienții de determinare în cazul regresii liniare cu două și respectiv o singură variabilă explicativă.

Se observă că funcțiile de producție estimate pentru cele 4 țări au o plajă largă a valorilor coeficienților de determinare, de la 0,2568 la 0,9960. Compararea valorilor estimate în cazul regresii multiple cu două variabile explicative și a regresii simple și pe această bază identificarea coeficienților de aliniere la hazardul colinearității. relevă faptul apariția colinearității toxice în cazul României, a colinearității degradante în cazul Spaniei, a colinearității laxe în cazul Regatului Unit și a anticolinearității în cazul Slovaciei (tabelul nr. 2).

Tabelul nr.2

Mărimea și factorii determinanți ai coeficienților de aliniere la hazardul colinearității pentru funcția de producție $\ln Y = \ln A_2 + \alpha_2 * \ln L_w + \beta_2 * \ln L_B$ în România, Spania, Regatul Unit și Slovacia în perioada 1995-2002

1994=100

Indicator	România	Spania,	Regatul Unit	Slovacia
$T_{\ln L_W}$	-8,2360	0,7427	0,9825	1,01457
$T_{\ln L_B}$	1,4412	0,2645	0,9720	1,0185
$R(\ln L_w; \ln Y)$	-0,0040	0,9963	0,7906	0,4214
$R(\ln L_B; \ln Y)$	-0,4326	0,9874	0,6269	-0,7019
Variabila explicativă principală	$\ln L_B$	$\ln L_w$	$\ln L_w$	$\ln L_B$
r_{sp}	0,0925	0,9911	0,7929	0,6004
$R(\ln L_w; \ln L_B)$	0,5860	0,9814	0,0227	0,0270
$R(\ln L_w; \ln L)_{tr}$	0,5860	0,9814	0,0227	-0,0270
$\frac{2R(\ln L_w; \ln L_B)_{tr}}{1 + R^2(\ln L_w; \ln L_B)}$	0,8724	0,9998	0,0454	Nu este cazul
Tipul colinearității	Colinearitate toxică	Colinearitate degradantă	Colinearitate laxă	Antiolinearitate

Se remarcă faptul că segmentul profesiilor non-manuale ale populației ocupate constituie factorul principal al regresiei liniare în cazul Spaniei și Regatului Unit și factorul secundar în cazul României și Slovaciei.

În cazul României, colinearitatea toxică este generată în primul rând de valoarea extrem de scăzută a coeficientului de corelație Pearson $R(\ln L_w; \ln Y)$, comparativ cu $R(\ln L_B; \ln Y)$. Din acest motiv, coeficientul de determinare are o valoare foarte scăzută (0,2568).

În cazul Spaniei colinearitatea degradantă se manifestă în contextul atingerii unui nivel ridicat al corelației între ambii factori de producție și output (0,9963 și respectiv 0,9874). Valoarea coeficientului

de determinare este foarte ridicată, dar este obținută cu prețul reducerii considerabile a valorii estimate pentru factorul secundar și implicit pentru valoarea calculată a testului Student.

În cazul Regatului Unit, existența unei colinearități laxe permite fructificarea aproape deplină a utilizării în ecuația de regresie liniară a celor două variabile explicative. Datorită faptului că valorile coeficienților de aliniere la hazardul colinearității sunt de peste 0,97 se asigură premisele atât pentru reducerea distorsiunilor în ceea ce privește valorile parametrilor estimați în cazul regresiiilor liniare simple, al creșterii valorii coeficientului de determinare, cât și a valorilor calculate ale Testului Student.

În cazul Slovaciei, apariția colinearității determină valori mai mari ale parametrilor estimați în regresia liniară multiplă, comparativ cu cei obținuți în cadrul regresiiilor liniare simple. De asemenea, respectivul fenomen are un impact pozitiv și asupra valorii coeficientului de determinare, precum și asupra valorilor calculate ale Testului Student.

Analiza factorială a valorilor calculate ale Testului Student Corectat arată că, exceptând România, în celelalte trei cazuri coeficientul de determinare domină pătratul coeficientului de corelație Pearson dintre cele două variabile explicative (tabelul nr. 3). Este important de subliniat că Cddc reprezintă factorul cu cea mai importantă contribuție în modelarea valorilor calculate ale Testului Student Corectat în trei dintre cele 4 estimări, excepția constituind-o cazul în care se manifestă colinearitatea toxică.

Tabelul nr. 3

Analiza factorială a Testului Student Corectat pentru funcția de producție
 $\ln Y = \ln A_2 + \alpha_2 * \ln L_w + \beta_2 * \ln L_B$ în România, Spania, Regatul Unit și Slovacia în perioada 1995-2002

1994=100

Indicator	România	Spania,	Regatul Unit	Slovacia
Cddc	0,9399	2,7709	15,8073	1,7859
RV_{studLW}	0,0894	2,2278	1,7678	0,9423
T_{lnLW}	-8,2360	0,7427	0,9825	1,01457
CST_{lnLW}	-0,6847	4,5847	27,4551	1,7597
RV_{studLB}	0,9673	2,2079	1,4018	1,5695
T_{lnLB}	1,4412	0,2645	0,9720	1,0185
CST_{lnLB}	1,3103	1,6182	21,5382	2,8508

Este de remarcă faptul că valoarea calculată a Testului Student corectat este mai mare decât valoarea de referință pentru ambele variabile explicative în cazurile unde există colinearitate laxă și anticolaritate (Regatul Unit și Slovacia). În cazul Spaniei, în condițiile unei colinearități degradante,

valoarea calculată este mai mare decât valoarea de referință numai în cazul variabilei explicative principale. În cazul României, valoarea calculată este mai mică decât valoarea de referință nu numai pentru variabila explicativă principală, cât și pentru cea principală.

Calculul componentelor Testului Student Sintetic relevă că valoarea de referință medie este mai mică decât media aritmetică a valorilor calculate ale Testului Student Sintetic în cazul Spaniei și României. (tabelul nr. 4). În aceste condiții, se poate trage concluzia că pe ansamblul fiecăreia dintre cele patru regresii liniare multiple avute în vedere contribuția principală la obținerea valorilor calculate ale testului Student Corectat a revenit Cddc.

Raportul dintre $CSTAM_{m;2}$ și $(F_{m;2})^{(1/2)}$, este puternic influențat de valoarea coeficientului $R(x_p; x_s)_{tr}$. Astfel, respectivul raport are valori foarte mici în cazul colinearității toxice și al colinearității degradante și foarte apropiate de 1 în cazul colinearității laxe și al anticolarității.

Tabelul nr. 4

Elementele Testului Student Sintetic pentru funcția de producție
 $\ln Y = \ln A_2 + \alpha_2 * \ln L_w + \beta_2 * \ln L_B$ în România, Spania, Regatul Unit și Slovacia în perioada 1995-2002

1994=100

Indicator	România	Spania,	Regatul Unit	Slovacia
CSTAM	0,3128	3,1015	24,4967	2,3053
RV _{med}	0,5284	2,2179	1,5929	1,2559
1	0,6305	0,5047	0,9778	1,0277
$\frac{1 + R(\ln L_w; \ln L_B)_{tr}}{(F_{m;2})^{(1/2)}}$	0,9294	22,7669	24,9499	2,3408
$\frac{CSTAM_{m;2}}{(F_{m;2})^{(1/2)}}$	0,3366	0,1362	0,9818	0,9848
$\frac{1 - R(\ln L_w; \ln L_B)_{tr}}{1 + R(\ln L_w; \ln L_B)_{tr}}$	0,2610	0,0094	0,9556	1,0555
Cv(CST _{m;2})	3,1826	0,4809	0,1209	0,2366

Mărimea coeficienților de variație a valorilor calculate ale Testului Student Corectat respectă considerațiile teoretice făcute anterior. Astfel, valoarea respectivului indicator este foarte ridicată în cazul colinearității toxice și foarte redusă în cazul colinearității laxe și al anticolarității. În cazul colinearității degradante, coeficientul de variație este de mărime medie, dar semnificativ mai mare decât pragul critic la care se face tranziția de la colinearitatea degradantă la colinearitatea laxă.

6. Concluzii.

Din prezentarea făcută pe parcursul lucrării a rezultat că fenomenul de colinearitate se manifestă încă de la luarea în considerație a cel puțin două variabile explicative în cadrul modelului de regresie liniară. Colinearitatea are ca efecte apariția unor distorsiuni în ceea ce privește mărimea parametrilor estimați și a valorii unor teste statistice.

Un indicator important al distorsiunilor generate de colinearitate este coeficientul de aliniere la hazardul colinearității și care prezintă unele similitudini cu raportul dintre zgomot și semnal. În cadrul regresiei cu două variabile explicative, coeficienții de aliniere sunt ordonați în funcție de intensitatea corelației dintre variabilele explicative și variabila rezultativă.

O specificitate a regresiei cu două variabile explicative rezidă în faptul că în cadrul ei se pot pune în evidență în mod explicit toate cele 4 tipuri de colinearitate posibile din punct de vedere teoretic (colinearitate toxică, colinearitate degradantă, colinearitate laxă și anticolinearitate). Dacă numărul de variabile explicative este de cel puțin trei, situația de anticolinearitate este estompată de numărul sporit de variabile explicative, precum și de gradul de colinearitate indus de celelalte variabile explicative.

Tipul de colinearitate este în mod esențial determinat de raportul în care se află coeficientul de corelație mediată de variabila rezultativă și coeficientul de corelație Pearson dintre variabilele explicative. Posibilitatea apariției colinearității toxice impune utilizarea Testului Student Corectat.

Definirea Testului Student Sintetic permite punerea în evidență a legăturilor dintre tipul de colinearitate și distribuția valorilor calculate ale Testului Student Corectat, precum și corelația dintre Testul Student Corectat și Testul Fisher.

Interdependențele dintre tipul de colinearitate și valorile Testului Student Sintetic relevă faptul că logica metodei celor mai mici pătrate în forma sa standard impune nu numai independența variabilelor explicative, ci și tendința spre echilibru a intensității corelației dintre variabilele explicative și variabila rezultativă. De aici rezultă că în mod inerent adăugarea excesivă a unor noi variabile explicative în ecuația de regresie are un randament descrescător. Respectiva tendință se concretizează prin majorarea valorii coeficientului de determinare, concomitent cu reducerea valorii calculate a Testului Student Corectat.

Proprietățile coeficienților de aliniere al hazardul colinearității referitoare la regresia liniară cu două variabile explicative pot fi avute în vedere și la construcția unor modele econometrice cu cel puțin

trei variabile explicative. Pornindu-se de la faptul că **fenomenul de colinearitate are un caracter cumulativ**⁸, se poate defini o regulă pentru evitarea introducerii în cadrul unei regresii multiple a unor variabile explicative între care există o colinearitate toxică. Respectiva regulă presupune parcurgerea următorilor pași:

a) testarea tipului de colinearitate între toate perechile de variabile explicative în sensul determinării existenței colinearității toxice sau al anticolinearității. Aceasta presupune identificarea relației în care se află coeficientul de corelație mediată și coeficientul Pearson transformat dintre variabilele explicative. Pe această bază, se poate determina **colinearitatea toxică**, în cazul când coeficientul de corelație mediată este mai mic decât coeficientul de corelație Pearson transformat dintre variabilele explicative, sau dacă există **anticolinearitate**, dacă cele două de tipuri de coeficienți de corelație au semne contrare.

b) cunoscându-se tipul de colinearitate dintre perechile de variabile explicative, în cadrul unei ecuații liniare cu cel puțin trei variabile explicative nu vor fi introduse perechile de variabile explicative între care există colinearitate toxică. Excepțiile de regulă pot fi cazurile când se identifică coexistența unei colinearități toxice cu anticolinearitatea, care ar putea să se compenseze.

Bibliografie

D Belsey (1976)– Multicollinearity: Diagnosing its presence and assessing the potential damage it causes least square estimation, *NBER Working Paper no. 154, Cambridge, Massachusetts, October*.

D. A. Belsey, E.Kuh, R.E. Welsch (1980) - Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity, Wiley Series in Probability and Statistics, New York.

D. Belsley (1991)- Conditional diagnostics: collinearity and weak data in regression. Wiley Series in Probability. John Wiley, New York.

C. Conrad (2006)-Applied Regression Analysis. Lectures Notes, Department of Economics, Pomona College, Claremont, California, Spring.

C.Dougherty (2002)- Introduction to econometrics-Second Edition, Oxford University Press.

D. Douglas, D.Clader, J.Cristy, P. Michaelis, D.Belsey (2003)- Test about harmful collinearity among predictor variables used in modeling global temperature, *Climate research vol. 24, June*.

⁸ Caracterul cumulativ al colinearității, pe măsura creșterii numărului de variabile explicative, este demonstrat în (F. M. Pavelescu, 2010a) de reducerea valorii medii a coeficienților de aliniere la hazardul colinearității.

D. Farrar, R. Glauber (1967)- Multicollinearity in regression analysis: The problem revisited, *Review of Economics and Statistics, February*.

R.Frisch (1934)- Statistical confluence analysis by means of complete regression systems, University Institute of Economics, Oslo.

W. Greene (1993)-Econometric Analysis, Mc Millan Publishing Company, New York.

Y. Haitovsky (1969)- Multicollinearity in regression analysis: Comment, *Review of Economics and Statistics, November*.

D. Jula (2003)- Introducere în Econometrie, Ed Professional Consulting, București.

M. G. Kendall (1957) -A course in multivariate analysis, Hafner.

L. Klein (1962)- An introduction to econometrics, Prentice Hall.

T. Kloeck, L.B.M. Menes (1960) – Simultaneous equations estimation based on principal components of predetermined variables, *Econometrica, vol. 28, no.1*.

T. K. Kumar (1975) – Multicollinearity in regression analysis, *Review of Economics and Statistics, August*.

Ng Set Foong (2008) - New biased estimators to handle the problem of multicollinearity, doctoral thesis, Universiti Sains Malaysia.

F. M. Pavelescu (1986) - Some considerations regarding the Cobb-Douglas production function estimated parameters. A new approach, *Revue Roumaine des Sciences Sociales Tome 30 No 1-2*.

F. M. Pavelescu (2004) - Features of Ordinary Least Square (OLS) method. Implications for estimation methodology, *Romanian Journal of Economic Forecast no.2*.

F. M. Pavelescu (2005) - Impact of collinearity on the estimated parameters and values of classical Statistical tests in conditions of multifactorial linear OLS regressions *Romanian Journal of Economic Forecast no.2*.

F .M. Pavelescu (2009)- A review of Student Test properties in condition of multifactorial linear regression, *Romanian Journal of Economic Forecast no.1*

F .M. Pavelescu (2010a)- An Analysis Model for the Disturbances Generated by Collinearity in the context of the OLS Method, *Romanian Journal of Economic Forecast no.2*.

F .M. Pavelescu (2010b)- An Extensive Study on the Disturbances Generated by Collinearity in a linear Regression Model with Three Explanatory Variables, *Romanian Journal of Economics no.2 (40)*.

S.D.Sylvey (1969) – Multicollinearity and imprecise estimation, *Journal of Royal Statistical Society, Series B, Vol.31*.

G.W. Stewart (1973) – Introduction to matrix computation, Academic Press, New York.